Heinrich Bürger

Näherungsprozesse und reelle Zahlen

1. Warum Analysis?

Wozu wird Analysis an allgemeinbildenden höheren Schulen unterrichtet? Welche Ziele kann ein Unterricht in Analysis verfolgen? Zwei Gesichtspunkte scheinen hier bedeutungsvoll zu sein:

1. Im Analysisunterricht kann eine Auseinandersetzung mit Begriffen wie "unbegrenzt nähern" oder "unendlich klein" und mit dem Begriff der irrationalen Zahlen erfolgen. Diese Begriffe haben in der realen Welt keine Entsprechung und können als Schöpfungen des menschlichen Geistes angesehen werden. Zumindest seit der Antike haben sich Menschen mit der Problematik dieser Begriffe beschäftigt und auf verschiedene Weisen versucht, sie zu präzisieren. Eine Auseinandersetzung der Schüler mit diesen Themen kann sowohl als ein kulturgeschichtlicher und philosophischer Beitrag des Mathematikunterrichtes, als auch als ein Beitrag zu einem allgemeinen Lernziel "exaktes Arbeiten, Argumentieren" angesehen werden. (Man vergleiche [1]).

2. Die Analysis, insbesondere die Differential- und die Integralrechnung, liefert Werkzeuge zur Behandlung vieler inner- und außermathematischer Probleme. Die Vermittlung grundlegender Techniken und Einsichten, die für solche Anwendungen (auch außerhalb des Mathematikunterrichtes) notwendig erscheinen, sollte daher ein Ziel des Analysisunterrichts sein. Darüber hinaus kann die Beschäftigung von Schülern mit Problemen, zu deren Lösung Methoden der Analysis

herangezogen werden können, einerseits Beiträge zu dem allgemeinen Lernziel "Produktives Arbeiten" , andererseits Beiträge zu dem allgemeinen Lernziel " Anwenden von Mathematik" liefern.

Welchen Zweck haben solche Betrachtungen, wie sie hier angestellt werden? Die Klärung der Frage "Warum wird ein bestimmtes Thema unterrichtet?" ist eine Voraussetzung für die Untersuchung der Frage " Wie kann dieses Thema unterrichtet werden?"
Darüber hinaus kann eine Analyse eines vorgegebenen Lehrgangs im Hinblick auf damit verbundene Zielsetzungen klären, ob dieser Lehrgang wirklich sich an den Zielsetzungen orientiert, oder ob vielleicht Teile des Lehrgangs diesen Zielen nicht dienlich und damit entbehrlich sind. Durch solche Analysen können sich somit Möglichkeiten für Stoffreduktionen ergeben, sodaß der ständig beklagten "Stoffüberlastung" im Mathematikunterricht entgegengewirkt werden kann.

Im folgenden wird nun die durch den Lehrplan für die sechste Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen (zehnte Schulstufe) vorgeschriebene Behandlung von Zahlenfolgen und des Grenzwertes von Zahlenfolgen, die als erste Einführung in die Analysis angesehen werden kann, nach einigen didaktischen Gesichtspunkten, vor allem im Hinblick auf mögliche Zielsetzungen und deren Realisierung untersucht. Anschließend wird eine andere Möglichkeit zur Hinführung zu Begriffen wie " unbegrenzt nähern" und zum Begriff der irrationalen Zahlen sowie zur Präzisierung dieser Begriffe aufgezeigt.

2. Analyse der Einführung in die Analysis mit Hilfe von Zahlenfolgen.

Bei der Behandlung der Zahlenfolgen treten in österreichischen Lehrbüchern ([2],[3],[4]) folgende Einzelthemen auf:

- Definition von Zahlenfolgen als Funktionen mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$.
- Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen.

- Monotonie von Folgen.
- Schranken von Folgen.
- Häufungswerte.
- Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge.
- Sätze über die Grenzwerte einer Summe, einer Differenz, eines Produktes und eines Quotienten konvergenter Folgen.
- Konvergenz von beschränkten monotonen Folgen.
- Intervallschachtelungen zur Beschreibung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.
- Anwendung der Grenzwertdefinition bei der Herleitung der Formeln für den Umfang und den Inhalt des Kreises.
- Nachweis der Existenz von Wurzeln mit Hilfe der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Zu erwähnen ist noch, daß die Eigenschaften von Zahlenfolgen vorwiegend an Beispielen der Art $n \mapsto \frac{2n+3}{4n-1}$, also an rationalen Folgen demonstriert werden.

Welche Ziele des Analysisunterrichts können durch die Behandlung dieser Themen verfolgt werden? Denkbar sind folgende Ziele:

(1) Vertrautwerden mit Begriffen wie "unbegrenzt nähern" oder "Grenzwert" auf intuitivem Niveau.

(2) Kennenlernen einer Präzisierung solcher Begriffe, etwa durch die Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge.

(3) Arbeiten mit einer solchen Definition zur Begründung mathematischer Aussagen, z.B. zur Begründung der Formeln über den Kreisumfang und den Kreisinhalt.

(4) Thematisieren der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen, d.h. es wird etwa festgestellt, daß die Menge der reellen Zahlen, die folgende charakteristische Eigenschaft hat (die die Menge der rationalen Zahlen nicht besitzt):

Zu jeder Folge von Intervallen $\langle [a_1,b_1],[a_2,b_2],[a_3,b_3],\ldots\rangle$ mit $[a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq [a_3,b_3] \supseteq \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} (b_n-a_n) = 0$ gibt es genau eine Zahl x, sodaß $x \in [a_n,b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. (Intervallschachtelungsaxiom).

(5) Arbeiten mit der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen zur Begründung mathematischer Aussagen, z.B. Begründen der Existenz von Wurzeln mit dem Intervallschachtelungsaxiom.

Ein weiteres Ziel der Behandlung des Grenzwertes von Zahlenfolgen kann die Bereitstellung von Mitteln zur Fundierung weiterer Begriffe der Analysis sein, insbesondere des Grenzwertes von Funktionen, die über $\mathbb{R}$ definiert sind, mit Hilfe des Grenzwertes von Zahlenfolgen. In keinem der österreichischen Schulbücher werden aber Zahlenfolgen dazu verwendet, d.h. dieses Ziel wird nicht angestrebt. Damit ist auch die Behandlung der Sätze über Summe, Differenz, Produkt und Quotient von konvergenten Zahlenfolgen entbehrlich. Diese Sätze werden oft nur dazu herangezogen, um Grenzwerte von rationalen Folgen zu bestimmen, etwa nach dem Muster:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{4-\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{2+0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Solche Grenzwertbestimmungen sind im allgemeinen bedeutungslos und dienen anscheinend nur zur Illustration dieser Sätze.

In welchem Ausmaß und in welcher Art ist nun eine Behandlung der obigen Einzelthemen zum Kapitel Zahlenfolgen im Hinblick auf die Ziele (1) - (5) zweckmäßig?

Für das Ziel (1), dem Vertrautwerden mit Grenzprozessen, genügen vermutlich relativ wenige Beispiele, bei denen das Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten durch Berechnen von Gliedern mit hoher Stellenzahl (allenfalls unter Anwendung des Taschenrechners) oder durch anschauliche Darstellung demonstriert wird. Sehr illustrative Veranschaulichungen können hier durch geometrische Reihen erfolgen.

(Dabei ist allerdings zu beachten, daß schwierige Aufgaben eine starke Konzentration der Schüler auf die Lösung der Aufgabe, allenfalls auf technische Details, erfordern, und damit vom eigentlichen Ziele, dem intuitiven Erfassen des Grenzwertes ablenken, ja dies sogar als unwesentlich erscheinen lassen.) Die meisten der angeführten Einzelthemen und Aufgaben, die in österreichischen Lehrbüchern behandelt werden, sind im Hinblick auf dieses Ziel (1) entbehrlich.

Akzeptiert man das Ziel (2), nämlich Begriffe wie "sich unbegrenzt nähern" oder "Grenzwert einer Zahlenfolge" durch Umgleichungen und unter Verwendung der Quantoren " für alle" und "es gibt" in einer bereits bekannten Sprache präzise zu beschreiben, dann genügt dazu schon eine <u>Erarbeitung</u> einer Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge durch die Schüler. Als unmittelbares Lernziel ist dabei nicht eine bloße Kenntnis dieser Definition anzustreben, sondern es sollen die Schüler auch damit Vorstellungen verbinden, die eine Rekonstruktion dieser Definition ermöglichen. Darüber hinaus erscheinen auch Aufgaben gerechtfertigt, in denen Grenzwerte von rationalen Folgen oder auch von geometrischen Folgen, die auf intuitivem Wege ermittelt wurden, durch Anwendung dieser Definition bestätigt werden. Das Verständnis für diese Definition kann dadurch und durch Beweise der Divergenz von Folgen mit Hilfe der Definition noch vertieft werden. Solche Divergenznachweise können auch als ein Beitrag zu einem Lernziel "Logisches Schließen" angesehen werden.

Will man Anwendungen dieser Definition demonstrieren, so kann man dem Ziel (3) entsprechend, diese Definition zur Begründung mathematischer Aussagen heranziehen und etwa die Formeln für den Kreisumfang und den Kreisinhalt herleiten (Durchführung dieser Herleitungen in [4]). Allerdings sind solche Herleitungen teilweise schwierig und erfordern doch einige Stunden an Unterrichtszeit, werden also vielfach nicht oder nur andeutungsweise durchführbar sein.

Die Thematisierung der Vollständigkeit (Ziel (4)) und die damit verbundene Feststellung, daß für reelle Zahlen die Gültigkeit des Intervallschachtelungsaxioms vorausgesetzt wird, ist an und für sich unschwierig und in kurzer Zeit zu behandeln. Dazu muß nicht einmal eine Definition des Grenzwertes von Zahlenfolgen vorausgesetzt werden, sondern dazu reicht ein intuitiver Grenzwertbegriff. Das bedeutet, daß dafür nur minimale Kenntnisse über Zahlenfolgen notwendig sind. Ähnliches trifft auch für den Nachweis der Existenz von Wurzeln zu (in [4] durchgeführt), der dem Ziel (5) entsprechend durchgeführt werden kann.

Aus den bisherigen Ausführungen ergibt sich, daß im Hinblick auf die Ziele (1) bis (5) nicht alle der angeführten Einzelthemen, die in österreichischen Lehrbüchern aufscheinen, behandelt werden müßten. Beispielsweise stehen die (im Lehrplan vorgeschriebenen) Themen "Monotonie von Zahlenfolgen" und "Schranken von Zahlenfolgen" vielfach ohne Beziehung zu Grenzprozessen und es ist nicht einzusehen, welchem Zweck zahlreiche Aufgaben zur Untersuchung des Monotonieverhaltens von Folgen und zum Nachweis von Schranken von Folgen dienen sollen. Auf die Entbehrlichkeit der Sätze über Grenzwerte von Summen, Produkten usw. wurde bereits hingewiesen. Die Untersuchung der Einführung in die Analysis mit Hilfe von Zahlenfolgen in der in Schulbüchern meist üblichen Form soll noch durch die folgenden Feststellungen ergänzt werden.

Die in der Schule in erster Linie verwendeten rationalen Folgen und auch geometrische Folgen haben rationale Grenzwerte, sofern nicht bei rationalen Folgen schon irrationale Zahlen als Glieder auftreten. Das Problem der Irrationalität stellt sich bei diesen Folgen nicht. Irrationale Grenzwerte von Folgen mit rationalen Gliedern treten etwa auf, wenn man Folgen von Näherungswerten für Wurzeln betrachtet. Solche Folgen sind aber nicht durch rationale Terme darstellbar, die Grenzwertdefinition kann nicht unmittelbar angewendet werden. Auch bei rekursiv definierten Folgen, wie sie etwa durch die Heronsche Formel $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$

zur Bestimmung von $\sqrt{a}$ geliefert werden, stößt die Anwendung der Grenzwertdefinition auf Schwierigkeiten.

Bei der besprochenen Einführung in die Analysis gehen der Behandlung der Probleme der Irrationalität, der Existenz und der Bestimmung von Wurzeln ebenso wie der Behandlung des Problems der Kreisberechnung im allgemeinen eine Reihe von theoretischen Überlegungen voraus, die zunächst keine Anwendung finden. Die beiden klassischen Probleme der Irrationalität, nämlich Wurzelberechnung und Kreisberechnung, sind daher -wenn sie überhaupt im Zusammenhang mit der Präzisierung des Grenzwertes von Zahlenfolgen behandelt werden- sicherlich nicht mehr motivierend für die Einführung in die Analysis und für die Behandlung der Zahlenfolgen selbst.

3. Näherungsprozesse als Einführung in die Analysis

Im folgenden soll nun dargelegt werden, wie man von den Problemen der näherungsweisen Berechnung von Wurzeln und der näherungsweisen Berechnung von Nullstellen von Polynomfunktionen ausgehend, zu einer Präzisierung des "unbegrenzten Näherns" an eine Zahl gelangen kann.

Ausgangspunkt kann etwa die Aufgabe sein, eine Zahl $x > 0$ zu bestimmen, sodaß $x^2 = 2$ ist. Je nachdem, zu welchem Zeitpunkt und in welchem Zusammenhang man diese Frage stellt, werden Schüler die Existenz einer solchen Zahl bezweifeln oder nicht.

Stellt man etwa diese Frage in der dritten Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen, also in der siebenten Schulstufe, ohne anschaulichen Zusammenhang, so wird die Existenz einer solchen Zahl für einen Schüler nicht selbstverständlich sein, da er keine Zahl angeben kann, deren Quadrat 2 ist. Er kann nur Zahlen angeben, deren Quadrate in der Nähe von 2 sind. Am Beispiel $1{,}41 \cdot 1{,}41$ kann demonstriert werden, daß das Quadrat einer endlichen Dezimalzahl nicht 2 sein kann. Denn so wie $1{,}41 \cdot 1{,}41$ eine Dezimalzahl mit 4 Nachkommastellen sein muß, die an der letzten Stelle die Ziffer 1 hat, so ist das Quadrat jeder n-stelligen Dezimalzahl x eine Dezimalzahl mit 2n Nachkommastellen, deren letzte Ziffer nicht 0 sein kann, da diese Ziffer aus dem Quadrat der letzten Nachkommastelle von x gewonnen wird. Ebenso ist am Beispiel von $\frac{141}{100} \cdot \frac{141}{100}$ zu erkennen, daß das Produkt zweier Brüche, die vollständig gekürzt sind, ein Bruch ist, der selbst nicht mehr kürzbar ist und daher nicht gleich 2 sein kann.

Stellt man die Aufgabe, eine Zahl x zu bestimmen, sodaß $x^2 = 2$ ist, im Zusammenhang mit der Berechnung der Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1, dann wird an der Existenz von x zunächst kaum ein Zweifel bestehen, da man an der Existenz der Diagonale dieses Quadrates nicht zweifelt. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich auch hier das Existenzproblem von $\sqrt{2}$: Mit der Existenz der Diagonale ist nämlich noch nicht gesichert, daß man dieser Diagonale auch eine Maßzahl als Länge zuordnen kann. Denn auch bei noch so feiner dezimaler Unterteilung der Einheitsstrecke kann man die Diagonale mit der Einheitsstrecke und deren Teilen (in endlich vielen Schritten) nicht ausmessen.

Eine allfällige Frage nach der Lösbarkeit von $x^2 = 2$ kann in der siebenten Schulstufe vorläufig auf folgende Weise beantwortet werden: Man kann die Schüler daran erinnern, daß für sie in der fünften Schulstufe die Gleichung $x + 5 = 3$ unlösbar war, weil es keine natürliche Zahl **x** gibt, für die diese Gleichung gilt, und weil sie nur die natürlichen Zahlen kannten. Es gibt aber eine die Menge $\mathbb{N}$ umfassende Menge, nämlich die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die eine Lösung von $x + 5 = 3$ enthält. Ebenso ist es denkbar, daß es eine die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen umfassende Menge gibt, die eine Zahl x mit $x^2 = 2$ enthält. Es ist nun zweckmäßig, <u>anzunehmen</u>, bzw. <u>vorauszusetzen</u>, daß es eine solche Menge gibt, eine Menge, die man als Menge der reellen Zahlen bezeichnet. Erst durch diese Annahme ist es möglich, jeder Strecke eine Längenmaßzahl zuzuordnen.

Welche Bedeutung "es gibt eine Menge der reellen Zahlen" in diesem Zusammenhang für die Schüler hat, kann nicht ausgesagt werden. Möglicherweise bedeutet "es gibt ein Objekt" für einen Schüler, daß er dieses Objekt "kennt" oder daß eine andere Person es kennt oder daß die Möglichkeit besteht, daß er es noch kennenlernen kann. Sicherlich führt der Umgang mit Wurzeln und anderen irrationalen Zahlen, insbesondere bei geometrischen Berechnungen, dazu, daß die Zweifel an der Existenz von Wurzeln und von irrationalen Zahlen bald schwinden, sofern sie überhaupt bestanden haben sollten. In der zehnten Schulstufe (sechste Klasse) ist daher die Existenz von Wurzeln für Schüler im allgemeinen unproblematisch.

Im folgenden soll davon ausgegangen werden, daß für die Schüler eine Lösung von $x^2 = 2$ existiert bzw. daß diese Existenz vorausgesetzt wird. Dann kann man von unteren und oberen Näherungswerten für $\sqrt{2}$ sprechen und die Frage nach der Genauigkeit der Bestimmung von $\sqrt{2}$ durch solche Näherungswerte stellen. Man kann dazu definieren:

> Eine Zahl z ist mit der Genauigkeit ε ($\varepsilon > 0$) bestimmt, wenn es einen unteren Näherungswert a und einen oberen Näherungswert b gibt, sodaß $b - a < \varepsilon$ ist.

Beispielsweise kann $\sqrt{2}$ mit der Genauigkeit 0,001 bestimmt werden, weil a = 1,4142 und b = 1,4143 untere bzw. obere Näherungswerte sind, für die $b - a < 0{,}001$ gilt.

Man erkennt leicht, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ durch systematisches Probieren zwei (endliche) Dezimalzahlen a und b bestimmt werden können, sodaß $a^2 \leq 2 \leq b^2$ und $b - a < \varepsilon$ ist. Die Zahl $\sqrt{2}$ kann also mit jeder Genauigkeit $\varepsilon > 0$ und somit "unbegrenzt genau" bestimmt werden.

Auf ähnliche Weise können nicht nur Wurzeln, sonder auch Nullstellen von Polynomen und damit Lösungen von Gleichungen n-ten Grades mit vorgegebener Genauigkeit berechnet werden. Beispielsweise findet man durch systematisches Probieren, daß für die Funktion f mit $f(x) = x^3 - x - 1$ gilt:

$$f(1) < 0 < f(2)$$
$$f(1{,}3) < 0 < f(1{,}4)$$
$$f(1{,}32) < 0 < f(1{,}33)$$
$$f(1{,}324) < 0 < f(1{,}325)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daraus erkennt man, daß eine zwischen 0 und 1 liegende Nullstelle von f, deren Existenz vorläufig angenommen werden soll, mit jeder gewünschten Genauigkeit, also "unbegrenzt genau" berechnet werden kann.

An solche Beispiele kann nun die folgende Definition angeschlossen werden:

Eine Zahl z wird mit unbegrenzter Genauigkeit festgelegt, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl a und eine Zahl b gibt, sodaß gilt: $a \leq z \leq b$ und $b - a < \varepsilon$.

Damit erfolgt eine Präzisierung des Begriffes "unbegrenzt genau" mit Hilfe von Ungleichungen und Quantoren. Der Zugang zu dieser Definition ist relativ einfach. Die Definition selbst ist einfacher als die Definition des Folgengrenzwertes, weil sie nur zwei Quantoren enthält.

Ergänzend können noch weitere Begriffe definiert werden. So kann man beispielsweise eine Menge A von unteren Näherungswerten und eine Menge B von oberen Näherungswerten einer Zahl z (bzw. die Bestimmung dieser Mengen) als eine zweiseitige Näherung (bzw. als zweiseitiges Näherungsverfahren) bezeichnen. Eine solche zweiseitige Näherung kann man als konvergent mit dem Grenzwert z oder als Eingrenzung von z bezeichnen, wenn die Zahl z durch diese Mengen mit unbegrenzter Genauigkeit festgelegt wird, d.h. wenn also für alle $a \in A$ und für alle $b \in B$ die Beziehung $a \leq z \leq b$ gilt und wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ und ein $b \in B$ existiert, sodaß $b - a < \varepsilon$ ist.

4. Beschreibung der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen durch zweiseitige Näherungen.

In der sechsten Klasse wird häufig bewiesen, daß die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Lösung hat. Damit kann neuerlich die Frage nach der Existenz einer Lösung dieser Gleichung bzw. nach der Existenz einer Zahlenmenge, die eine solche Lösung enthält, aufgeworfen werden. Auch bei der Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = x^3 - x - 1$ ist die Existenz einer Nullstelle durchaus nicht gesichert, wenn auch diese Existenz vorerst unzweifelhaft erscheint, wenn man den Graphen von f zeichnet. Doch haften einer solchen Zeichnung zwei Mängel an: Einmal werden nur einzelne Punkte des Graphen berechnet, z.B. die Punkte (1 / -1) und (2 / 4), und diese Punkte werden durch eine Kurve verbunden, d.h. man schließt aus der Lage von zwei Punkten auf die Lage aller dazwischen liegenden (also unendlich vieler) Punkte. Zum zweiten sollte den Schülern klar sein, daß geometrische Objekte, wie Punkte oder Geraden, durch Zeichnungen nur mangelhaft wiedergegeben werden (Punkte werden etwa durch kleine Scheibchen dargestellt, die aus einer Ansammlung von sehr vielen Molekülen oder Atomen einer Bleistiftmine bestehen). Man kann bei den üblichen Maßstäben die

Punkte (1,234 / f (1,234)) und (1,235 / f (1,235)) sicherlich nicht unterscheiden. Bei entsprechender Vergrößerung sind andere Punkte nicht unterscheidbar. Aus dem Bild eines Graphen, das die Menge aller Paare (x / f(x)) nur sehr mangelhaft wiedergibt, kann also nicht mit Sicherheit auf die Existenz einer Nullstelle von f geschlossen werden.

Trotz solcher Verunsicherungen wird vielleicht doch die Existenz von Wurzeln oder von Nullstellen von Polynomfunktionen für manche Schüler unproblematisch sein. Dann kann man die Frage aufwerfen, ob durch zwei beliebig konstruierte Zahlenmengen A,B die im wesentlichen die Eigenschaften einer konvergenten zweiseitigen Näherung haben, eine Zahl mit unbegrenzter Genauigkeit festgelegt wird. Legen beispielsweise die Mengen

$A = \{1 | 1{,}01 | 1{,}01001 | 1{,}010010001 | 1{,}01001000100001 | \ldots\}$
$B = \{1 | 1{,}02 | 1{,}01002 | 1{,}010010002 | 1{,}01001000100002 | \ldots\}$ eine Zahl

fest? Gibt es eine Zahl z, sodaß $a \leq z \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$?

Die Frage kann positiv beantwortet werden, wenn man annimmt (voraussetzt), daß es eine Menge gibt - die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen - die die folgende Vollständigkeitseigenschaft hat:

Es seien A,B Teilmengen von $\mathbb{R}$, wobei

(i) für alle $a \in A$ und für alle $b \in B$ die Beziehung $a \leq b$ gilt und
(ii) zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Zahlen $a \in A$ und $b \in B$ existieren, sodaß $b - a < \varepsilon$ ist.
Dann gibt es genau eine Zahl $z \in \mathbb{R}$, sodaß $a \leq z \leq b$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist.

(Aus dieser Eigenschaft der reellen Zahlen kann das Intervallschachtelungsaxiom gefolgert werden).

Die Vollständigkeitseigenschaft ist auch schon durch die Bedingung (i) gewährleistet (worauf mich V.Losert hingewiesen hat). Man kann sie also auf folgende einfachere Weise formulieren (man vergleiche etwa [5], [6],[7]):

Sind A und B Teilmengen von $\mathbb{R}$, sodaß für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Beziehung $a \leq b$ gilt, dann gibt es (mindestens) eine Zahl $z \in \mathbb{R}$, sodaß $a \leq z \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ ist.

Daraus kann man folgern:

Falls zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $a \in A$ und $b \in B$ existieren, sodaß $b - a < \varepsilon$ ist, dann gibt es genau eine Zahl z mit $a \leq z \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

Diese Folgerung ergibt sich so: Würden zwei verschiedene Zahlen z_1, z_2 (etwa $z_1 < z_2$) existieren, die zwischen allen Elementen von A und allen Elementen von B liegen, dann müßte $a \leq z_1 < z_2 \leq b$ und $b - a \geq z_2 - z_1$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gelten. Dem widerspricht aber, daß $a \in A$ und $b \in B$ existieren müssen, sodaß $b - a < z_2 - z_1$ ist.

Aus der Vollständigkeitseigenschaft kann nun die Existenz einer reellen Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt, hergeleitet werden. Dazu wählt man für jede natürliche Zahl n jene Dezimalzahlen a_n und b_n mit n Nachkommastellen, für die $a_n^2 \leq 2 < b_n^2$ und $b_n - a_n < \frac{1}{10^n}$ gilt. Also ist:

$$a_0 = 1;\ a_1 = 1{,}4;\ a_2 = 1{,}41;\ \ldots$$
$$b_0 = 2;\ b_1 = 1{,}5;\ b_2 = 1{,}42;\ \ldots$$

Wir setzen $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}, B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da zu jedem $\varepsilon > 0$ n so groß gewählt werden kann, daß $b_n - a_n = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ ist, gibt es genau eine Zahl x, sodaß $a \leq x \leq b$ für alle $a \in A$, $b \in B$ ist.

Wir setzen ferner $A' = \{a_n^2 | n \in \mathbb{N}\}$, $B' = \{b_n^2 | n \in \mathbb{N}\}$.
Dann gilt für alle $a^2 \in A'$ und alle $b^2 \in B'$: $a^2 \leq b^2$.
Ferner kann zu jedem $\varepsilon > 0$ die Zahl n so groß gewählt werden, daß ein $a_n \in A$ und ein $b_n \in B$ mit $b_n^2 - a_n^2 < \varepsilon$ existieren.
[Es gilt nämlich $b_n^2 - a_n^2 = (b_n - a_n)(b_n + a_n) < \frac{1}{10^n}(2+2) = \frac{4}{10^n}$, weil $a_n, b_n \leq 2$]. Somit gibt es genau eine Zahl, die zwischen allen Elementen von A' und allen Elementen von B' liegt.

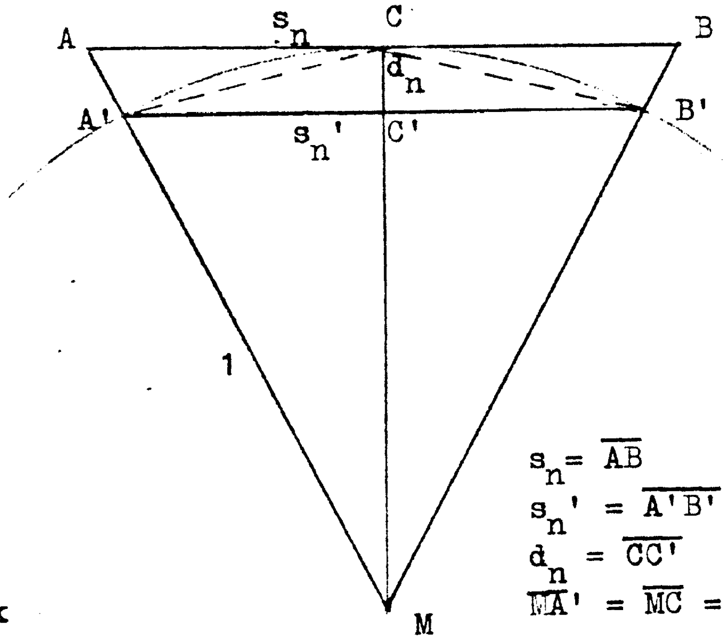
Da sowohl $a^2 \leq x^2 \leq b^2$ als auch $a^2 \leq 2 \leq b^2$ für alle $a^2 \in A'$ und $b^2 \in B'$ gilt, muß $x^2 = 2$ sein.

Auf ähnliche Weise kann allgemein die Existenz von Wurzeln bewiesen werden. Aus der Vollständigkeitseigenschaft kann auch der Zwischenwertsatz bzw. als Sonderfall der Nullstellensatz hergeleitet werden: Ist f eine in $[a,b]$ stetige Funktion und $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(b) < 0 < f(a)$, dann gibt es eine Zahl $x \in [a,b]$, sodaß $f(x) = 0$ ist. - Daraus folgt die Existenz einer Nullstelle der Funktion $f: x \to x^3 - x - 1$ im Intervall $[1,2]$.

5. Flächeninhalt und Umfang des Kreises

Es sei K ein Kreis mit dem Radius 1. Sein Flächeninhalt (bzw. dessen Maßzahl) sei A(K), sein Umfang (bzw. dessen Maßzahl) sei U(K). Als Näherungswerte für diese Größen dienen die Flächeninhalte und Umfänge von um- bzw. eingeschriebenen regelmäßigen Vielecken.

Um zu zeigen, daß Kreisinhalt und Kreisumfang dadurch mit unbegrenzter Genauigkeit festgelegt werden, betrachten wir ein umgeschriebenes regelmäßiges n-Eck V_n mit der Seitenlänge s_n, ein eingeschriebenes regelmäßiges n-Eck V_n' mit der Seitenlänge s_n' und ein eingeschriebenes regelmäßiges 2n-Eck V_{2n}'. Ferner sei d_n der Abstand zweier paralleler Seiten von V_n und V_n'.



$s_n = \overline{AB}$
$s_n' = \overline{A'B'}$
$d_n = \overline{CC'}$
$\overline{MA'} = \overline{MC} = 1$

MAB...Teildreieck von V_n
MA'B'...Teildreieck von V_n'
MA'CB'...Teildeltoid von V_{2n}'

Für die Flächeninhalte $A(V_n)$ und $A(V_{2n}')$ von V_n und V_{2n}' gilt dann:

$$A(V_n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot n \cdot s_n$$

$$A(V_{2n}') = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s_n' \cdot 1 = \frac{1}{2} n \cdot s_n'$$

(V_{2n}' ist aus n Deltoiden zusammengesetzt, die zum Deltoid MA'CB' kongruent sind).

$$A(V_n) - A(V_{2n}') = \frac{1}{2} n (s_n - s_n')$$

Für s_n und s_n' gilt:

$$s_n : s_n' = 1 : (1 - d_n)$$

$$s_n' = s_n - s_n d_n$$

$$s_n - s_n' = s_n d_n$$

Daraus folgt:

$$A(V_n) - A(V_{2n}') = \frac{1}{2}.n.s_n.d_n = \frac{1}{2}.U(V_n).d_n$$

Dabei ist $U(V_n) = n.s_n$ der Umfang von V_n. Da $U(V_4) = 8$ und für $n \geq 4$ ferner $U(V_n) \leq U(V_4) = 8$ ist, gilt:

$$A(V_n) - A(V_{2n}') \leq 4.d_n$$

Anschaulich ist klar, daß der Abstand d_n beliebig klein gemacht werden kann, daß also zu jedem $\varepsilon > 0$ die Eckenzahl n so groß gewählt werden kann, daß $d_n < \frac{\varepsilon}{4}$, also

$$A(V_n) - A(V_{2n}') < \varepsilon$$

ist. (Am Schluß dieses Abschnittes wird gezeigt, daß $d_{2n} < \frac{1}{2} d_n$ ist, woraus sich auch rechnerisch ergibt, daß $d_n < \frac{\varepsilon}{4}$ zu erreichen ist.)

Damit ist gezeigt, daß der Flächeninhalt A(K) durch die Flächeninhalte der um- bzw. eingeschriebenen Vielecke mit unbegrenzter Genauigkeit festgelegt ist.

Für die Umfänge $U(V_n)$ und $U(V_n')$ der um- bzw. eingeschriebenen n - Ecke gilt:

$$U(V_n) = n.s_n = 2\,A(V_n) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}U(V_n) = A(V_n)$$

$$U(V_n') = n.s_n' = 2\,A(V_{2n}') \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}U(V_n') = A(V_{2n}')$$

Daraus erkennt man, daß die Flächeninhalte der um- bzw. eingeschriebenen Vielecke (bzw. die Maßzahlen dieser Inhalte) eine zweiseitige Näherung für den halben Kreisumfang (bzw. dessen Maßzahl) bilden und diesen mit unbegrenzter Genauigkeit festlegen. Da bei unbegrenzter zweiseitiger Näherung nur eine Zahl festgelegt wird, gilt:

$$A(K) = \frac{1}{2}U(K) \quad \text{bzw.} \quad \underline{U(K) = 2\,A(K)}$$

Für den Flächeninhalt $A(K_r)$ eines Kreises mit dem Radius r bilden die Flächeninhalte $A(V_r)$ und $A(V_r')$ der umgeschriebenen bzw. eingeschriebenen Vielecke eine zweiseitige Näherung. Jedes Solche Vieleck V_r bzw. V_r' geht durch Streckung aus einem Vieleck V bzw. V' hervor, das einem Kreis mit dem Radius 1 um- bzw. eingeschrieben ist. Somit gilt für diese Inhalte:

$A(V_r) = r^2\, A(V)$, $A(V_r') = r^2\, A(V')$

Daraus folgt für alle Vielecke V und V': $r^2 A(V') \leq A(K_r) \leq r^2\, A(V)$

$$A(V') \leq \frac{A(K_r)}{r^2} \leq A(V).$$

Das bedeutet, daß die Flächeninhalte der dem Kreis K mit dem Radius 1 um- bzw. eingeschriebenen Vielecke eine zweiseitige Näherung für $\frac{A(K_r)}{r^2}$ bilden. Da von dieser Näherung bereits gezeigt wurde, daß sie konvergent ist und A(K) mit beliebiger Genauigkeit festlegt, gilt:

$$\frac{A(K_r)}{r^2} = A(K).$$

Setzt man $\frac{A(K_r)}{r^2} = A(K) = \pi$, dann gilt:

$$\underline{A(K_r) = r^2\pi}$$

Analog kann man zeigen, daß gilt:

$$\frac{U(K_r)}{r} = U(K) = 2A(K)$$

$$\underline{U(K_r) = rU(K) = 2r\pi}$$

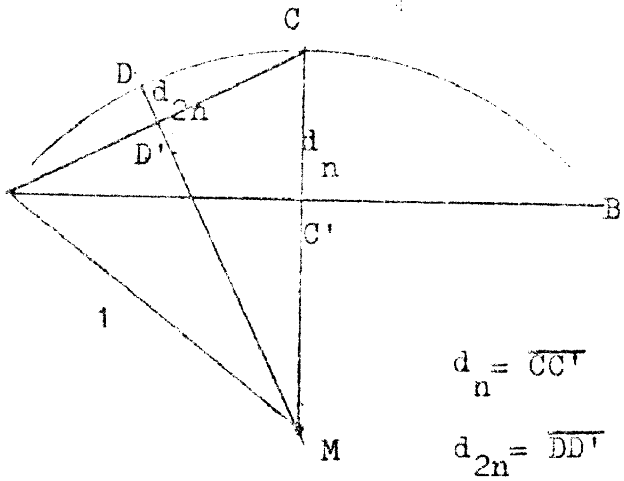
<u>Bemerkung</u>: Bei den bisherigen Ausführungen werden Flächeninhalt und Umfang des Kreises als undefinierte Begriffe, die für die Schüler anschaulich klar sind, verwendet. Man kann aber auch auf Grund der obigen Überlegungen den Flächeninhalt und den Umfang des Kreises als jene Zahlen definieren, die durch die entsprechenden zweiseitigen Näherungen auf Grund der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen existieren und eindeutig festgelegt sind.

Nachweis von $d_{2n} < \frac{1}{2} d_n$:

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AM}^2 - \overline{MC'}^2 = 1-(1-d_n)^2 = 2d_n - d_n^2$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2 = 2d_n - d_n^2 + d_n^2 = 2d_n$$

$$\overline{MD'}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{D'C}^2 = 1 - \frac{1}{2} d_n$$



$d_n = \overline{CC'}$

$d_{2n} = \overline{DD'}$

Wegen $\overline{MD'} = 1-d_{2n}$ folgt daraus:

$$(1-d_{2n})^2 = 1 - \frac{1}{2} d_n$$

$$\frac{1}{2} d_n = 2d_{2n} - d_{2n}^2 = d_{2n}(2-d_{2n})$$

Da $d_{2n} < 1$, folgt $2-d_{2n} > 1$, sowie $d_{2n}(2-d_{2n}) > d_{2n}$,

also: $\underline{\frac{1}{2} d_n > d_{2n}}$

6. Bemerkungen zur Einführung in die Analysis mit zweiseitigen Näherungen

Die hier dargestellte Einführung in die Analysis mit Hilfe von zweiseitigen Näherungen gestattet eine relativ einfache und rasche Realisierung der in Abschnitt 2 angeführten Zielsetzungen (1) bis (5). So erfolgt dabei eine Einführung in Grenzprozesse und die Schüler lernen eine einfache Präzisierung des Begriffes "unbegrenzt genau" kennen. Ferner kann die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ charakterisiert werden. Schließlich ist es möglich, die Vollständigkeitseigenschaft und den Begriff der unbegrenzten Genauigkeit zu Begründungen anzuwenden und so damit zu arbeiten.

Als ein Vorteil dieses Vorgehens kann angesehen werden, daß von motivierenden Problemen ausgegangen werden kann, die Anlaß geben für theoretische Überlegungen (unbegrenzte Genauigkeit, Vollständigkeit), die unmittelbar bei der Behandlung dieser Probleme angewendet werden können. Will man hingegen diese Probleme mit Hilfe eines definierten Grenzwertbegriffes behandeln, so erfolgen die Hinführung zu einer Grenzwertdefinition und deren Erläuterung üblicherweise -vermutlich auch notwendigerweise- an Beispielen, die mit dem Problem nicht im Zusammenhang stehen.

Um nachzuweisen oder zu erläutern, daß eine Zahl Grenzwert einer Zahlenfolge ist, muß diese Zahl bereits bekannt sein. Das Problem der Genauigkeit der Berechnung des Grenzwertes stellt sich daher nicht. Ist jedoch bei einer konvergenten Folge,die sich einem Grenzwert nur einseitig nähert, weil sie beispielsweise monoton ist, der Grenzwert nicht bekannt, so kann die Genauigkeit mit der dieser Grenzwert durch einzelne Glieder der Folge approximiert wird, nicht angegeben werden. Dazu ist ein zweiseitiges Näherungsverfahren notwendig. Die Betrachtungen über die Genauigkeit einer Approximation können auch als ein Beitrag zur numerischen Mathematik gewertet werden.

Mit diesen Ausführungen soll nicht gegen die Behandlung von Zahlenfolgen im Unterricht argumentiert werden. Die geschilderte Behandlung von zweiseitigen Näherungen kann sogar zum Anlaß genommen werden, um Zahlenfolgen zu betrachten und damit Grenzprozesse nochmals zu illustrieren. Eine ausführliche Behandlung, wie sie derzeit üblich ist, und insbesondere eine präzise Definition des Grenzwertbegriffes scheinen jedoch entbehrlich zu sein. (Nicht verzichtet werden sollte jedoch auf die Beschreibung von Wachstumsvorgängen durch geometrische Folgen, doch ist dieses Thema nicht unbedingt der Analysis zuzuordnen).

Der Begriff der Zahlenfolge kann selbstverständlich auch bei der geschilderten zweiseitigen Näherung verwendet werden. So können beispielsweise die Mengen A und B der unteren bzw. oberen Näherungswerte aus den Gliedern von Zahlenfolgen bestehen (z.B. aus den Enden einer Intervallschachtelung), also "Folgen von Zahlen" sein. Dieser Begriff kann aber hier undefiniert verwendet werden. Eine Definition einer Zahlenfolge als Funktion über $\mathbb{N}$ oder eine weitergehende Thematisierung dieses Begriffes ist in diesem Zusammenhang nicht nur überflüssig, sondern würde sogar vom eigentlichen Ziel ablenken. Eine Festlegung der Mengen A und B als Zahlenfolgen ist entbehrlich, da die durch die natürlichen Zahlen festgelegte Ordnung der Glieder dieser Folge, also der Elemente der Mengen, bei den Betrachtungen unerheblich ist. Man macht zumeist nur Aussagen über alle Elemente von A und B oder greift einzelne heraus, die Numerierung" spielt keine Rolle.

Hervorgehoben soll noch werden, daß die Mengen, die eine zweiseitige Näherung festlegen, auch nichtabzählbare Mengen sein können. So kann für den Kreisinhalt als Menge A der unteren Näherungswerte die Menge aller eingeschriebenen Vielecke (und nicht nur der regelmäßigen Vielecke) verwendet werden.

Bei der Einführung in die Integralrechnung kann die Menge A die Menge aller Untersummen einer Funktion f in einem Intervall $[a,b]$ und die Menge B kann die Menge aller Obersummen von f sein. Damit ist eine einfache Fundierung des Integrals durch zweiseitige Näherungen möglich:

Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Untersumme $a \in A$ und eine Obersumme $b \in B$, sodaß $b - a < \varepsilon$ ist, dann heißt f im Riemannschen Sinne integrierbar und die durch A und B eindeutig festgelegte Zahl heißt das Integral von f in $[a,b]$.

Abschließend sei noch festgestellt, daß die wesentlichen Überlegungen für zweiseitige Näherungen in vereinfachter Darstellung auch als Grundlage der Einführung der Wurzeln und somit der Irrationalzahlen sowie der Kreisberechnung in der 7. Schulstufe (3. Klasse) dienen können.

Literatur:

[1] H.Bürger: Realisierung allgemeiner Lernziele des Mathematikunterrichts. (In: Journal für Mathematik-Didaktik Heft 4/81).

[2] J.Laub u.a.: Lehrbuch der Mathematik für die Oberstufe der allgemeinbildenden höheren Schulen, 2.Band.

[3] E.Szirucsek - H.Unfried - H.Schatzl: Arbeitslehrbuch Mathematik 6/1.

[4] H.Bürger - R.Fischer- G.Malle, Mathematik Oberstufe 2.

[5] A.Ostrowski: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Band I.

[6] G.Pickert: Einführung in die Differential- und Integralrechnung.

[7] W.Kroll: Differentialrechnung.